

ЧЕК-лист для учащегося

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ

РАЗБОР задания №23 КЕГЭ - 2022

Тема: динамическое программирование

повышенный уровень сложности,
примерное время выполнения – 8 минут, 1 балл

Элементы содержания, проверяемые заданием экзаменационной работы

Умение анализировать результат исполнения алгоритма содержащего ветвление и цикл

1.6.2 (код контролируемого элемента).

Вычислимость. Эквивалентность алгоритмических моделей (?).

1.1.3 (код контролируемого требования).

Умение строить информационные модели объектов, систем и процессов в виде алгоритмов (?).

Что нужно знать:

динамическое программирование – это способ решения сложных задач путем сведения их к более простым задачам того же типа

с помощью динамического программирования решаются задачи, которые требуют полного перебор вариантов:

- «подсчитайте количество вариантов...»
- «как оптимально распределить...»
- «найдите оптимальный маршрут...»

динамическое программирование позволяет ускорить выполнение программы за счет использования дополнительной памяти; полный перебор не требуется, поскольку запоминаются решения всех задач с меньшими значениями параметров

I способ (графический)

Исполнитель *РазДваПять* преобразует число на экране.

У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1

2. Умножить на 2

3. Прибавить 5

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2, третья увеличивает на 5.

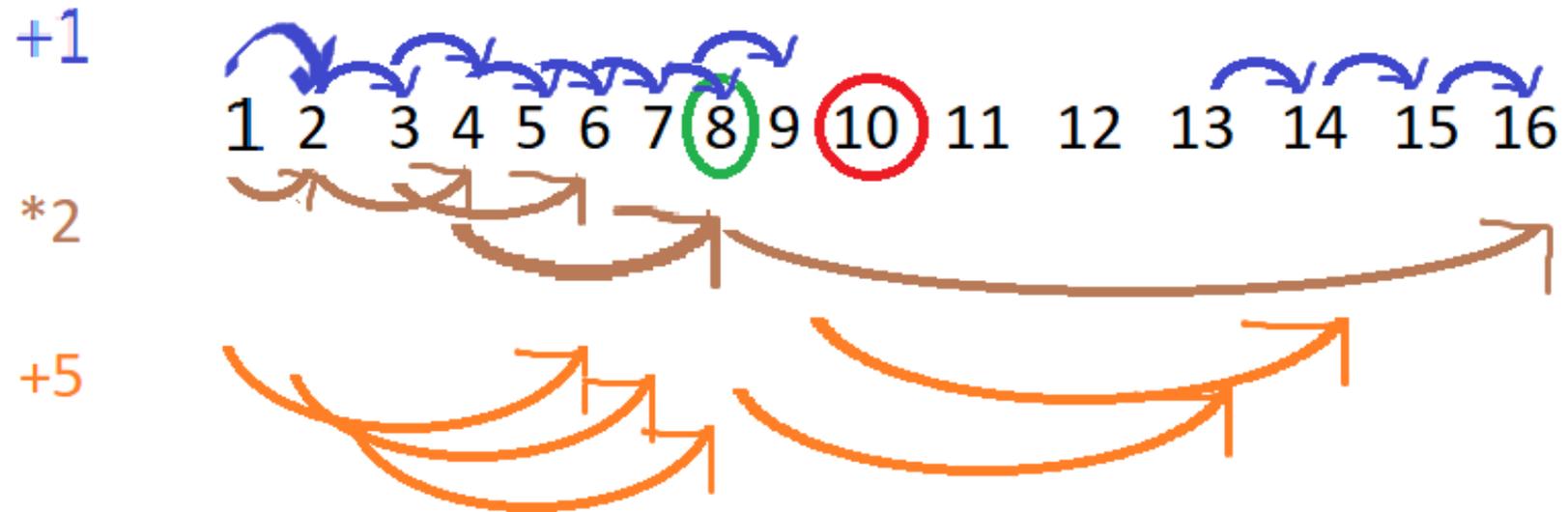
Программа для исполнителя РазДваПять — это последовательность команд.

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?

Траектория вычислений — это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы 312 при исходном числе 4 траектория будет состоять из чисел 9, 10, 20.

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

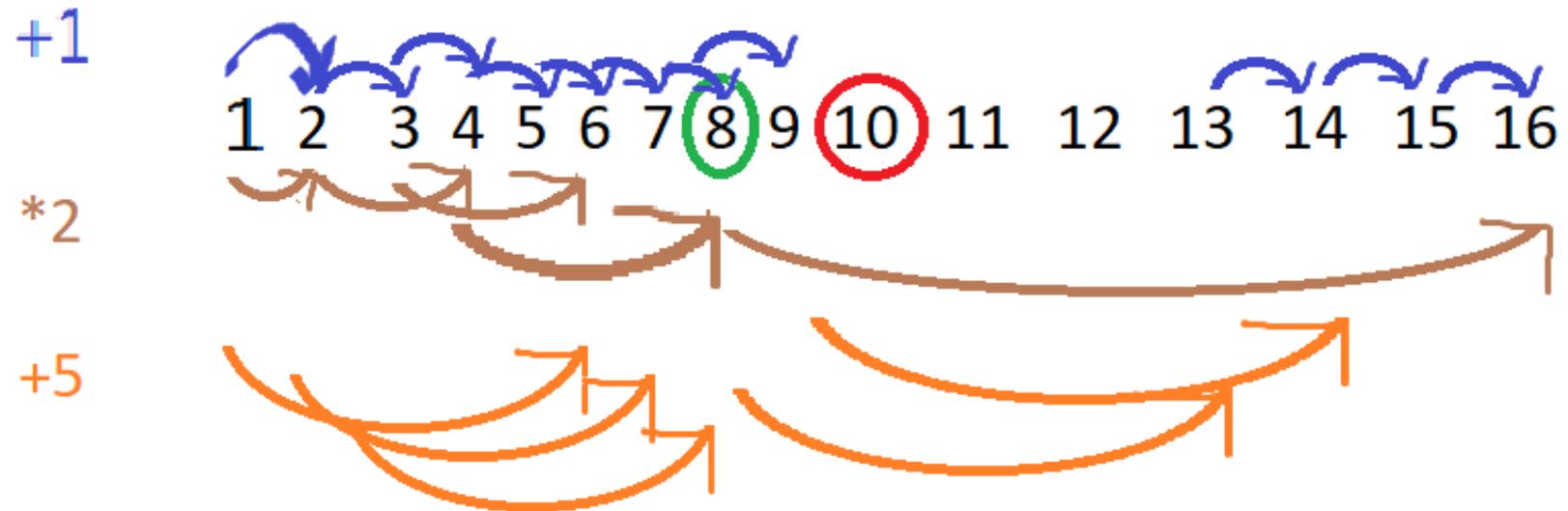
Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?



Решение. Сначала необходимо добраться до «8». В «2» можно попасть двумя командами «+1» и «*2» из «1». В «3» можно попасть только из «2» командой «+1». В «4» - из «2» и «3», в «5» - только из «4», в «6» - из «1», из «3» и из «5». В «7» попадет из «6», а в «8» - из «2», «3» и «7».

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

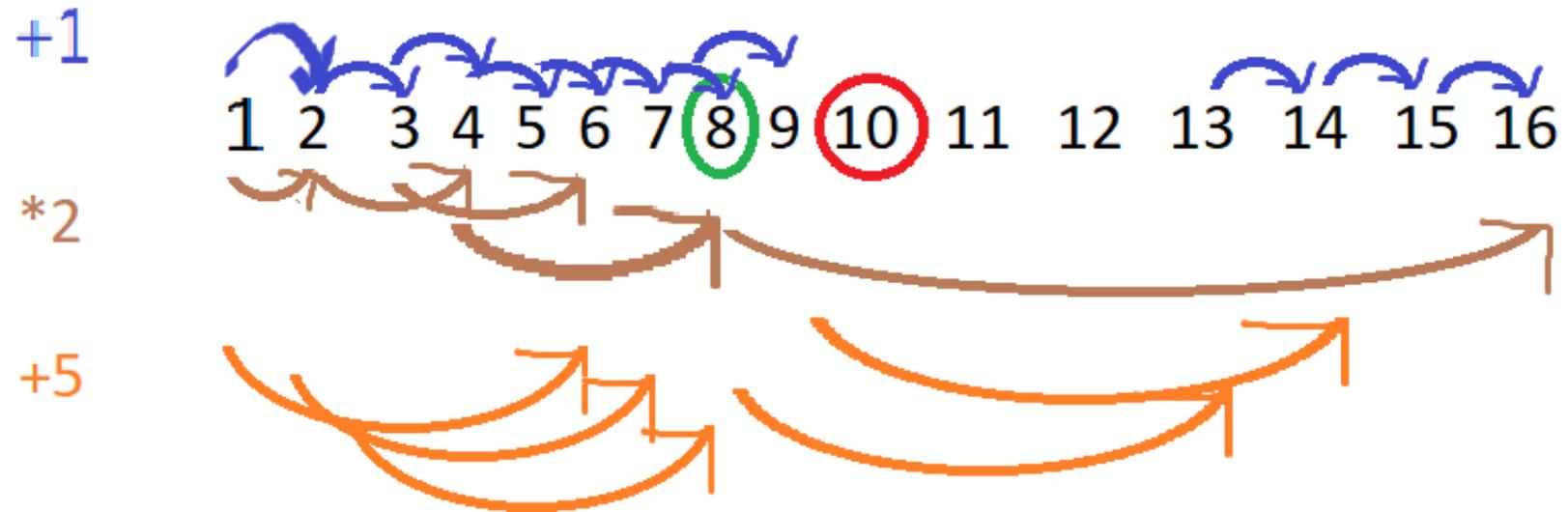
Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?



Решение. Затем из «8» можно попасть в «9», «13» и в «16». Так как траектория не должна содержать «10», то не сможем попасть в «11» и «12». В «14» попадем из «9» и «13», в «15» – из «14», в «16» – вторым способом из «15».

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?



Решение.

1 2 2 4 4 7 9 15 15 0 0 0 15 30 30 45

В «1» записываем одну команду. В «2» – 2 команды, в «3» – 2 команды, в «4» - количество команд из «2» + количество команд из «3», т. е. 4 команды. Далее продолжаем по схеме. **Ответ: 45.**

II способ (теоретический)

1. Прибавить 1

2. Умножить на 2

3. Прибавить 5

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?

Решение.

1) у нас в задании две особые точки – числа 8 (через которое должна проходить траектория) и 10 (а сюда она попасть НЕ должна)

2) сначала, так же, как и в задачах, рассмотренных ниже, составляем рекуррентную формулу, по которой будем вычислять количество K_N обозначить количество разных программ для получения числа N из начального числа:

3) число N могло быть получено одной из трех операций:

увеличением на 1 числа N-1;

умножением на 2 числа N/2 (только для N, которые делятся на 2);

увеличением на 5 числа N-5 (только для N>5)

$K_N = K_{N-1}$ для нечётных чисел, меньших 6, а для нечётных чисел, больших 5 - $K_N = K_{N-1} + K_{N-5}$

$K_N = K_{N-1} + K_{N/2}$ для чётных чисел, меньших 6, а для чётных чисел, больших 5 - $K_N = K_{N-1} + K_{N/2} + K_{N-5}$

4) для начального числа 1 количество программ равно 1: существует только одна пустая программа, не содержащая ни одной команды; $K_1 = 1$.

II способ (теоретический)

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?

Решение.

5) составляем таблицу до первой особой точки – числа 8:

N	1	2	3	4	5	6	7	8
K_N	1	2	2	4	4	7	9	15

6) поскольку число 8 должно обязательно войти в траекторию, начинаем составлять вторую часть таблицы (до второй контрольной точки, 10) с этого числа заново, считая, что все ячейки для меньших чисел – нулевые

N	8	9	10	11	12	13	14	15	16
K_N	15	15	0						

7) поскольку траектория не может проходить через 10, для $N = 10$ принимаем $K_N = 0$ (в таблице эта ячейка выделена красным цветом)

8) дальше заполняем оставшиеся ячейки второй части таблицы обычным способом:

N	8	9	10	11	12	13	14	15	16
K_N	15	15	0	0	0	15	30	30	45

Ответ: 45.

III способ Две таблицы (электронная таблица)

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?

Решение.

1) Сначала найдём количество программ для перехода от числа 1 к числу 8:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		1	2	3	4	5	6	7	8		
2		" +1									
3		*2									
4		" +5									
5	результат										

2) В ячейку B5 введите число 1, а в ячейку C2 – формулу: =B5. Скопируйте формулу в ячейки D2:I2.

3) Заполните третью строку. В ячейку C3 – формулу: =B5, E3 – формулу =C5, G3 – =D5, а в ячейку I3 – формулу: =E5.

III способ Две таблицы (электронная таблица)

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?

Решение.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		1	2	3	4	5	6	7	8		
2		" +1	1	2	2	4	4	7	9		
3		*2	1		2		2		4		
4		" +5					1	2	2		
5		1	2	2	4	4	7	9	15		
6											
7											
8		8	9	10	11	12	13	14	15	16	
9		" +1	15	15	0	0	0	15	30	30	
10		*2								15	
11		" +5					15	15	0	0	
12	результат	15	15	0	0	0	15	30	30	45	
13											
14											

Ответ: 45.

IV способ с помощью функции индекс (электронная таблица)

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?

Решение.

1. Основная идея решения заключается в том, что количество программ для данного числа равно сумме аналогичных значений чисел, в которые можно попасть из данного с помощью команд
2. будем использовать возможность функции **ИНДЕКС** возвращать значение из ячейки, адрес которой можно вычислить. Для этого функции надо знать диапазон, в котором брать значения и номер строки и столбца внутри диапазона
3. поскольку траектория содержит число 8, разобьем решение на два этапа
4. найдем количество программ, для которых при исходном числе 1 результатом будет 8. В столбец А внесем числа от 1 до 8 так, чтобы каждое число совпадало с номером строки

	A
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

IV способ с помощью функции индекс (электронная таблица)

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?

Решение.

5) в столбец В внесем формулу для подсчета количества программ. В ячейке В1 это будет формула
=ИНДЕКС(B\$1:B\$100;A1+1)+ИНДЕКС(B\$1:B\$100;A1*2)+ИНДЕКС(B\$1:B\$100;A1+5)

6) здесь **B\$1:B\$100** – это диапазон, внутри которого мы будем брать значения. Начинаться он должен с первой строки для того, чтобы нумерация строк внутри диапазона совпала с нумерацией чисел при вычислениях. А заканчиваться в такой ячейке, номер которой позволит взять любое число.

7) **A1+1** – это вычисление из какой строки надо взять данные. По условию задачи у нас три команды: +1, *2, +5 соответственно, для подсчета количества программ в ячейке **B1**, которая соответствует числу 1, мы возьмем числа из строк $1 + 1 = 2$, $1 * 2 = 2$ и $1 + 5 = 6$

8) данную формулу мы копируем на ячейки диапазона **B2:B7**, а в ячейку **B8** внесем 1

	A	B
1	1	15
2	2	7
3	3	4
4	4	2
5	5	1
6	6	1
7	7	1
8	8	1

IV способ с помощью функции ИНДЕКС (электронная таблица)

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?

Решение.

9) вторая часть решения - количество программ из 8 в 16. Построим данную часть правее, в столбцах **C** и **D**. Для корректной работы функции **ИНДЕКС** с формулами важно числа писать в совпадающие по номеру строки, а диапазон в формуле начинать с первой строки. Внесем формулу

**=ИНДЕКС(D\$1:D\$100;C8+1)+ИНДЕКС(D\$1:D\$100;C8*2)+
ИНДЕКС(D\$1:D\$100;C8+5)**

в ячейку **D8**, скопируем ее до ячейки **D15**, а в ячейку **D16** внесем 1. Для того, чтобы учесть, что в 10 нельзя, просто удалим значение в столбце **D** напротив 10.

10) в ячейке **B1** получилось количество программ, которыми можно попасть из 1 в 8, а в ячейке **D8** количество программ из 8 в 16 минус 10. Для получения итогового ответа перемножим эти числа: $15 * 3 = 45$

Ответ: 45.

	A	B	C	D
1	1	15		
2	2	7		
3	3	4		
4	4	2		
5	5	1		
6	6	1		
7	7	1		
8	8	1	8	3
9			9	1
10			10	
11			11	2
12			12	1
13			13	1
14			14	1
15			15	1
16			16	1
17				

V способ (программирование через рекурсию)

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Прибавить 5

Сколько существует программ, которые преобразуют исходное число **1** в число **16**, и при этом траектория вычислений **содержит число 8** и **не содержит числа 10**?

Решение.

Функция подсчета количества цепочек команд (программ).

n – исходное число, k - результат.

```
def F( n, k ):
```

```
    if n == k: # если цель достигнута, то
```

```
        return 1 # завершить функцию, посчитав цепочку (программу)
```

```
    if n==10 or n > k: # если n=10 или перелет, то
```

```
        return 0 # завершить функцию, не считая цепочку
```

```
    if n < k # продолжаем строить дерево:
```

```
        return F( n+1, k ) + F( n*2, k ) + F(n+5,k)
```

```
print( F( 1, 8 ) * F( 8, 16 ) )
```

Ответ: 45.