М.О. Воробьев

Учитель математики и преподаватель шахмат в «Точке роста»

МБОУ СОШ N3 с УИОП г. Котовска

Математика на шахматной доске

Современные требования образовательных стандартов ставят перед учителями новые задачи. Каждый год происходит обновление образовательных программ, меняются методики и практики, подходы и требования в обучении детей всех возрастных категорий. Ежегодно происходит корректировка экзаменационных заданий на выпускных экзаменах в школах во всех предметных областях. Самые сильные преобразования приходятся на предметы естественно-научного цикла. Математика занимает одно из лидирующих позиций по нововведениям не только на выпускных экзаменах, но и на проверочных работах различного уровня, олимпиадах т.д.

Не секрет, что подавляющее большинство математических задач имеют практико-ориентированный характер. Практически все текстовые задачи по математике основаны на реальных, связанных с применением на практике, проблемах, побуждающих к решениям.

Одной из таких бескрайних на число интересных задач областей являются шахматы, и все что с ними связано. Существует огромное множество олимпиадных задач на тему «шахматной доски» [1, 2], решение задач на теорию вероятностей редко обходиться без вопросов по шахматным играм, расстановок шахматных фигур или шахматным турнирам.

В данной статье будут рассмотрены приемы объяснения нескольких тем школьной общеобразовательной программы по математике с использованием теорий шахматной игры. Все приемы и методы были освоены и применены на внеурочной деятельности в рамках занятий по шахматам в «Точке роста» МБОУ СОШ №3 с УИОП г. Котовска.

Среди огромного множества разнообразных задач с участием шахматной доски и фигур можно выделить задачи, решения которых нужно найти, перебрав все возможные варианты, и найти самый целесообразный из них. Также существуют задачи на шахматы с нестандартными решениями, которые стимулируют самостоятельность мышления и учат творчеству. Поэтому шахматные задачи помогают соотносить мыслительные процессы с практическими действиями, наглядно иллюстрируют условие задачи и ход решения. И хотя, казалось бы, шахматная доска ограничена всего 64 клетками, существует множество математических задач с использованием шахмат и шахматной доски, и все они разнообразны и интересны. [3]

В связи с этим на шахматные задачи можно «опереться» при объяснении таких разделов математики как математическая логика, комбинаторные задачи, задачи на теорию вероятностей и геометрические задачи. Все эти направления хорошо освящены в таких знаменитых книгах как «Математика на шахматной доске» (1976) Е.Я. Гика, «Комбинаторные задачи на шахматной доске» (1935)

Л.Я. Окуневой, «Математические развлечения» Мартина Гарднера. [1, 2, 4, 5]. Именно эти источники литературы были использованы при подготовке материалов к урокам для объяснения математических законов с использованием шахмат.

Также существует множество математических задач, связанных с древними легендами об игре в шахматы. Например, одна из самых известных легенд о том, как изобретатель шахмат попросил у индийского принца в качестве вознаграждения за свое изобретение столько пшеничных зёрен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую – в 2 раза больше, т.е. 2 зерна, на третью – ещё в 2 раза больше, т.е. 4 зерна, и так далее до 64-й клетки. Эта задача прекрасно показывает сущность такого понятия как геометрическая прогрессия. Потому что, по легенде принц был очень удивлен, когда узнал, что его на первый взгляд пустяковую просьбу невозможно выполнить, как и любой современный человек, не знающий математику, тоже наверняка удивится. Но те, кто знает законы комбинаторики и математической статистики, понимают, что эту просьбу на самом деле невозможно выполнить, т.к. на 64 шахматной клетке должно будет оказаться 2^{64}-1 штук зерен, а это число во много раз превосходит все количество урожая, когда-либо собранного до настоящего времени. Подсчет показывает, что амбар для хранения необходимого зерна с площадью основания 80 м^2 должен простираться от Земли до Солнца. [6]

Также, хорошим приемом объяснения законов комбинаторики на шахматах будут задачи: 1) Сколькими способами можно расставить 8 мирных (т.е. не угрожающих друг другу) ладьей на шахматной доске? 2) Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две ладьи чтобы они не били друг друга? 3) Сколькими способами можно поставить на доску двух королей чтобы они не угрожали друг другу? 4) Сколько мирных королей можно разместить на одной шахматной доске? Сколькими способами можно добиться данного размещения? 5) Сколько мирных коней можно разместить на шахматной доске? Сколькими способами это можно сделать? 6) Сколько мирных слонов можно разместить на шахматной доске? Сколькими способами можно добиться этого размещения? 7) Сколько мирных ферзей можно разместить на шахматной доске? Сколькими способами это можно сделать?

Все задачи, условия которых перечислены выше, являются яркими примерами практического применения таких разделов математики как комбинаторика, математическая статистика, с применением таких формул как перестановки, размещения и сочетания (рис. 1)

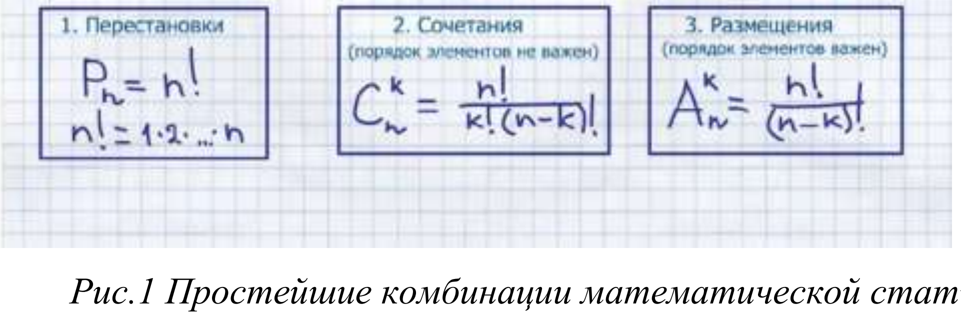

Рис.1 Простейшие комбинации математической статистики

Рассмотрим некоторые решения приведенных выше задач.
Вопрос о восьми мирных ладьях в первой задаче это весьма наглядный пример для объяснения что такое факториал и как его вычислить. (рис. 2). На примере этой задаче также хорошо продемонстрировать формулу для числа перестановок из раздела формулы комбинаторики и математической статистики. Не менее почетное место в этом разделе занимает задача о числе расстановок двух мирных ладьей на шахматной доске чтобы они не угрожали друг другу. (рис. 3).

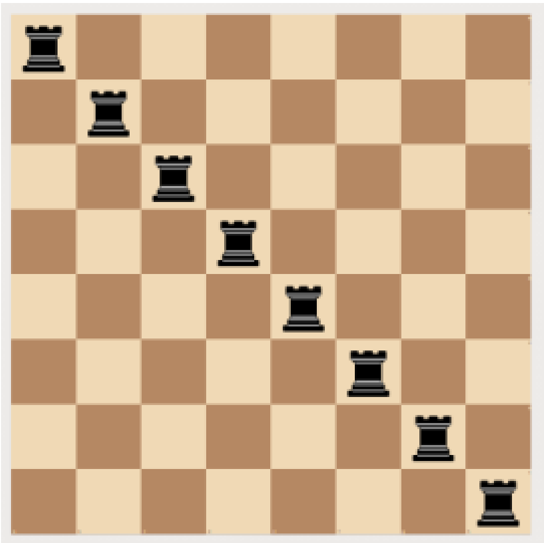

Рис. 2 Пример использования факториала в задаче о восьми мирных ладьях;

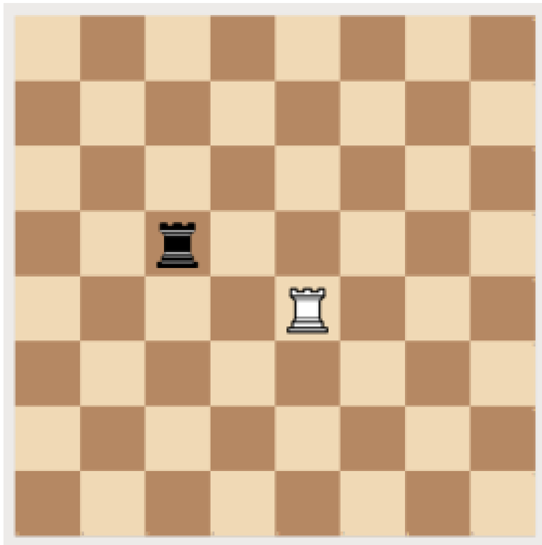

Рис. 3 Задача о числе расстановок двух мирных ладьей на шахматной доске;

На данном примере хорошо проиллюстрирован тот факт, что если белую ладью поставить на любое из 64 клеток шахматной доски, то с каждого из них она бьет 15 полей, включая поле, на котором стоит. При этом остаются 49 полей, на которые можно поставить черную ладью. Исходя из этих рассуждений черную и белую ладьи можно разместить на шахматной доске так чтобы они не угрожали друг другу 64*49=3136 способами. [7]

Продолжая «игру» с перестановками, рассмотрим задачу: сколькими способами можно поставить на доску двух королей, чтобы они не били друг друга. Решение данной задачи также проиллюстрировано на рисунке (рис. 4). На рисунке рассмотрено три случая расположения одного из королей. Предположим, что черный король занимает любое из 64 полей шахматной доски. Тогда расположение белого короля будет зависеть от его места положения в углу, с краю или в центре поля. Поэтому рассматриваются три случая:

1) Если белый король стоит в углу (углов всего 4), то он бьет 4 поля, включая то, на котором стоит, в этом случае остается 60 полей, на которые можно поставить черного короля;

2) Если белый король стоит на краю доски, не в углу (таких полей 24), то он бьет 6 полей, и для черного короля остается 58 возможных полей;
3) Если же белый король стоит не на краю доски, а таких полей – 36, то он бьет 9 полей, и для черного короля остается 55 возможных полей.

Таким образом, всего есть 4*60+24*58+36*55=3612 способов расстановки королей. [8] (рис. 4)

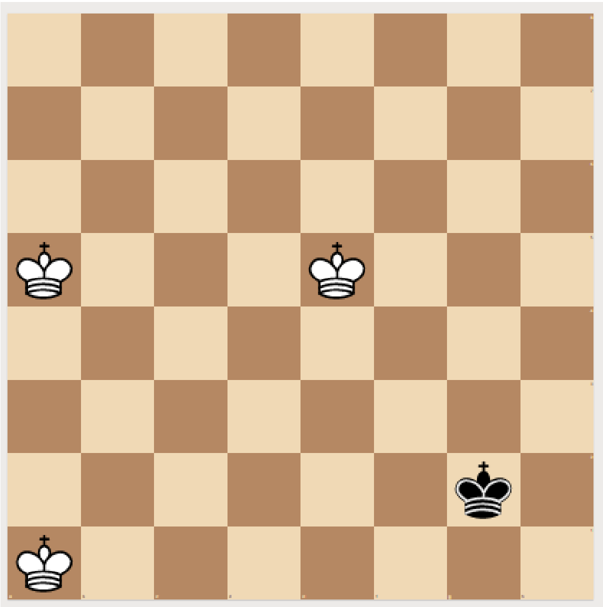

Рис. 4 Способы расстановки двух мирных королей на шахматной доске;

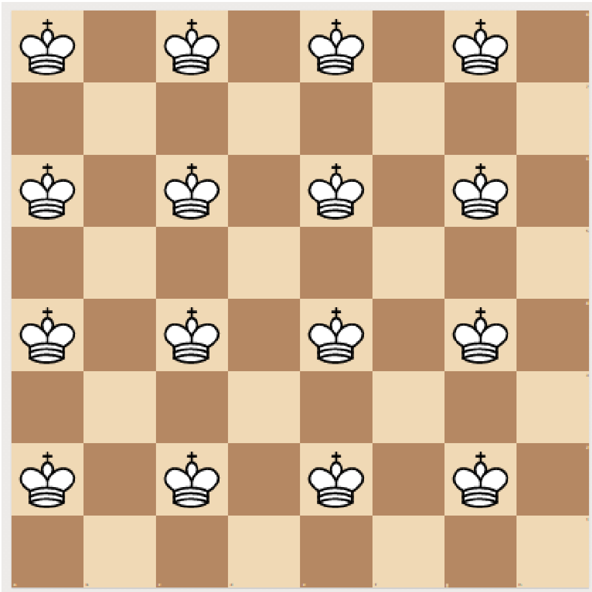

Рис. 5 Задача о 16-ти мирных королях на шахматной доске;

Аналогичными рассуждениями можно воспользоваться при решении задачи и числе расстановок максимально возможного количества мирных королей на шахматной доске (рис. 5). По рисунку можно легко ответить на вопрос чему равно это максимальное количество, но если отвечать на вопрос сколькими способами возможно их мирное размещение, то здесь все гораздо интереснее. Для ответа на этот вопрос требуется применение расчетов, выходящих за пределы школьной программы, но в качестве примера решение этой задачи имеет весьма любопытные рассуждения, приводящие к не менее интересному ответу - 281571 способ! [2, 9].

Не менее интересной среди задач на формулы комбинаторики является задача о количестве размещений мирных коней на шахматной доске. Дело в том, что конь среди всех шахматных фигур, обладает уникальным свойством – если он стоит на белом поле, то бьющими для него будут только черные поля и наоборот для коня, стоящего на черном поле. Используя это свойство, можно легко ответить на вопрос, о максимальном числе мирных коней на доске. Это число равно количеству белых или черных клеток доски, то есть тридцати двум. (рис. 6). И если продолжить аналогию о числе расстановок шахматных фигур на доске, приведенную выше, то конь снова на первом месте по уникальности ответа на вопрос, сколькими способами можно разместить максимальное число коней на шахматной доске – всего двумя! Либо все кони стоят на белых полях, и бьют только черные, либо стоят на черных полях, и бьют только белые.

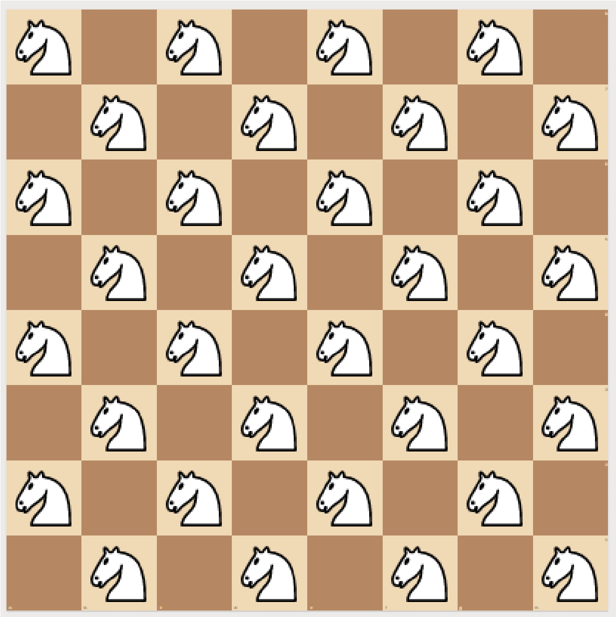

Рис. 6 Способы расстановки мирных коней на шахматной доске;

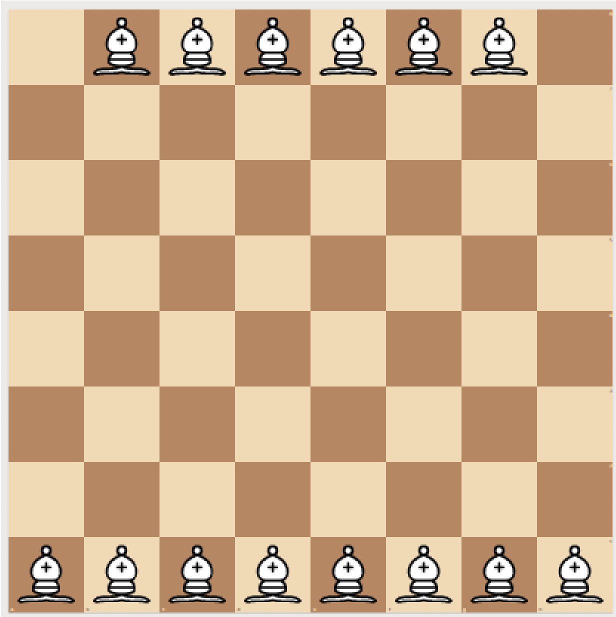

Рис. 7 Способы расстановки мирных слонов на шахматной доске;

Говоря о размещении максимального числа мирных слонов, можно сослаться на рассуждения, приведенные выше для других шахматных фигур, и дать верный ответ: всего мирных слонов на шахматной доске может стоять 14, способов расстановки – 256. [8]

Заключительной фигурой, рассматриваемой в рамках данной статьи, станет ферзь, и задача о максимальном количестве мирных ферзей на шахматной доске и способах их расстановок (рис. 8).

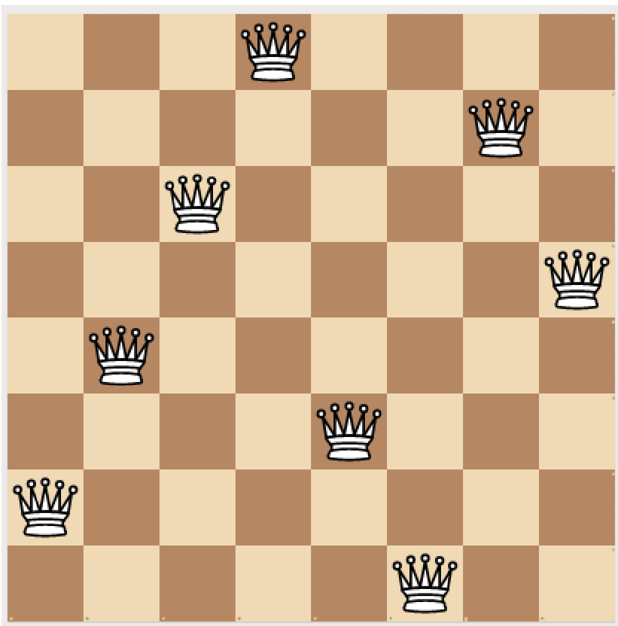

Рис. 8 Способы расстановки 8 мирных ферзей на шахматной доске;

По рисунку видно, что максимальное число таких ферзей не может превышать восемь, и для подсчета всех возможных вариантов их размещений помимо математических формул, выходящих за пределы школьной программы необходима ещё, и мощная вычислительная техника. В данной статье ограничимся лишь тем, что данная задача является далеко не тривиальной, ее решением занимались такие математики как К. Гаусс, М. Беццель, Ф. Наук, Д. Глэшер и другие. На сегодняшний день известно 12 основных способов расстановок мирных ферзей на доске 8 на 8 клеток, и 92 способа получены с учетом поворота шахматной доски. Задача на отыскание количества решений для произвольного размера доски N на N клеток, решена на настоящий момент только до N=26. Для этих вычислений потребовалось около полугода вычислений на трехстах мощных компьютерах! [10]

Список литературы:

1. Гик Е.Я. Шахматы и математика // Квант. – 1983. – Выпуск 24.
2. Гик Е.Я. Математика на шахматной доске. – М.: Аванта+, 2009
3. Сивцева А. К. Шахматы в математических задачах // Практические методики в области основного и дополнительного образования «МГУ-школе» 2013 г. стр. 48;
4. Окунева Л. Я. Комбинаторные задачи на шахматной доске М:1935 г.
5. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения // Пер. с англ. – М., 1971.
6. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра. 9 класс. – М.: Просвещение, 2009. – 271 с.
7. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки. Комбинаторика-1// «АСА» №13, 1994 г.
8. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки. Комбинаторика-1// «АСА» №14, 1994 г.
9. E. Bonsdorf, K. Fabel, O. Riihimaa. Schach and Zahl. – Dusseldorf, 1966;
10. Алексеева Е.В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи. Новосибирск: НГУ, 2012;